

# **Fördjupningsrapport om simuleringar av bombkurvan med Bolins och Eriksson matematisk modell**

*Av Pehr Björnbom*

**Rapporten ger en bakgrund som beskriver Bolin och Eriksson (1959), speciellt deras matematiska modell för att simulera mängden radioaktiv koldioxid i atmosfären. Därefter beskrivs hur denna modell har använts för att simulera bombkurvan, dvs. hur radioaktiv koldioxid minskat i atmosfären efter de atmosfäriska kärnvapenprovens upphörande 1963. Rapporten beskriver hur ekvationerna utvecklats, hur de programmerats för numerisk simulering, vilka parametervärden som använts samt resultaten.**

## **Inledning**

Bolin och Eriksson (1959), i det följande BE59, presenterade en teori för hur halten av koldioxid varierar i atmosfären på grund av förbränningen av fossila bränslen. De tog också fram en teori för hur mängdförhållandet mellan radioaktiv koldioxid och övrig koldioxid varierar i atmosfären på grund av sådana antropogena utsläppen.

Andelen radioaktiv koldioxid i atmosfären minskar när fossil koldioxid släpps ut eftersom fossil koldioxid inte innehåller någon radioaktiv koldioxid (radioaktiviteten har klingat av på grund av att kolet legat så länge i marken). Detta kallas för Süesseffekten och beror på att förhållandet mellan mängd radioaktiv koldioxidhalt och total mängd koldioxid minskar på grund av utspädning när fossil koldioxid utan radioaktiv koldioxid tillförs.

Andelen radioaktiv koldioxid minskar alltså på grund av utspädning men i förstone kan man tycka att mängden radioaktiv koldioxid inte påverkas av de antropogena utsläppen. Men till och med om vi inte har några antropogena utsläpp av radioaktiv koldioxid (eller annat radioaktivt kol som går in i kolcykeln) så kommer enligt teorin i BE59 mängden av radioaktiv koldioxid i atmosfären ändå att öka när fossil koldioxid släpps ut.

Detta beror på Revelleeffekten, nämligen att när den antropogena koldioxiden löser sig i havsvattnet så påverkar den jämvikten mellan dissocierad koldioxid i form av karbonatjoner och odissocierad koldioxid upplöst som koldioxid och kolsyramolekyler. Eftersom radioaktiv koldioxid snabbt antar praktiskt taget samma jämviktsfördelning mellan dissocierad och odissocierad som koldioxiden i övrigt så påverkas även den radioaktiva koldioxiden när utsläppt fossil koldioxid upplöses.

Koldioxiden överförs mellan atmosfär och hav och vice versa i form av molekylär koldioxid. När halten av odissocierad koldioxid ökar i havet kommer även halten koldioxid i atmosfären att öka. I jämvikt är nämligen koldioxidhalten i luften proportionell mot halten odissocierad koldioxid i havets omblandade ytskikt. Detta gäller också radioaktiv koldioxid. Halten av denna i atmosfären är proportionell mot halten odissocierad radioaktiv koldioxid i havets omblandade ytskikt.

BE59 härledde en matematisk modell för hur mängden av den radioaktiva koldioxiden kommer att variera i tre olika delar av jordsystemet, atmosfären, havets omblandade ytskikt och djuphavet, ekvationssystemet (36) på sidan 137. Med hjälp av denna modell gjorde de analyser på hur mängden av den radioaktiva koldioxiden borde ha ökat med de antropogena utsläppen av fossil koldioxid fram till 1954.

BE59 kunde jämföra med data från trädringar från långt tillbaka i tiden som visade Süesseffekten. Man ville använda denna effekt som ett mått på hur mycket fossil koldioxid som hamnat i luften men för att få till det rätt måste man ta hänsyn till Revelleeffekten som ju motverkar Süesseffekten. Det var detta som var huvudsyftet för denna del av analysen i BE59.

Med hjälp av den matematiska modellen kom BE59 fram till att mängden radioaktiv koldioxid hade ökat omkring 4 till 5 % år 1954 jämfört med förindustriell tid om den så kallade Revellefaktorn var lika med det teoretiska värdet 12.5 (se nedan). Mängden koldioxid som tillförts atmosfären genom

antropogena utsläpp var 1954 enligt uppskattningar drygt 10 %. Süesseffekten skulle enligt modelleringen bli en minskning av mängdförhållandet mellan radioaktiv koldioxid och övrig koldioxid i atmosfären med 3-7 % vilket var större än men tangerade uppmätta data som låg på 3 % minskning.

Vad BE59 däremot inte kunde göra var att testa sin matematiska modell på bombprovskurvan. Denna existerade ännu inte. Bombproven pågick vid tiden för BE59 men för artikeln använde man naturligtvis data som var från tiden före bombproven. Efter att bombproven i atmosfären upphörde 1963 så är det högtintressant att pröva den matematiska modellen i BE59 på den minskande radioaktiva koldioxidmängden i atmosfären. Denna radioaktiva koldioxidmängd hade nästan fördubblats på grund av proven men från 1963 avtar den. Man har kunnat följa hur den radioaktiv koldioxidmängden avtar i atmosfären efter 1963, detta finns publicerat som bombprovskurvan och en bra redogörelse finns i Gösta Petterssons bok [Falskt Alarm](#).

Denna rapport är en redogörelse för några tester med den matematiska modellen enligt BE59 för att se hur den beskriver bombprovskurvan. Det förefaller av mina tester som om bombprovskurvan beskrivs bäst om man antar att Revelleeffekten inte är verksam.

## **Beteckningar**

Vi använder liknande beteckningar som BE59.

$N_i$  = total mängd inte radioaktiv koldioxid i jämvikt i utgångsläget i reservoar i.

$N_i^r$  = total mängd radioaktiv koldioxid i jämvikt i utgångsläget i reservoar i (vi använder övre index r för att beteckna radioaktiv koldioxid i stället för \* som i BE59).

$N_i^r$  = mängd odissocierad inte radioaktiv koldioxid ( $\text{CO}_2$  och  $\text{H}_2\text{CO}_3$ ) i jämvikt i utgångsläget i reservoar i (endast tillämpligt i havet).

$N_i^{r'}$  = mängd odissocierad radioaktiv koldioxid ( $\text{CO}_2$  och  $\text{H}_2\text{CO}_3$ ) i jämvikt i utgångsläget i reservoar i (endast tillämpligt i havet).

$n_i, n_i^r, n_i^r, n_i^{r'}$  betecknar avvikelserna från jämviktsvärdena enligt ovan.

$k_{i-j}$  = utbyteskoefficient för överföring av kol från reservoar i till reservoar j.

$$\tau_{i-j} = \frac{1}{k_{i-j}}$$

Indexen i och j kan anta värdena a, m och d som betecknar respektive atmosfären, havets omblandade skikt (mixed layer) och djuphavet.

Övriga beteckningar förklaras vartefter.

## **Ekvationer och parametervärden**

Vi börjar med de ekvationer som beskriver Revelleeffekten, dvs. när total mängd antropogen koldioxid i havets omblandade skikt ökar så ökar mängden odissocierad koldioxid flera gånger mer. Hur många gånger odissocierad mängd ökar per ökad totalmängd kallas för Revellefaktorn.

Ekvation (17) i BE59 kan skrivas som följer där  $R$  är Revellefaktorn som BE59 anger till värdet 12.5:

$$\frac{n_m'}{N_m'} = R \frac{n_m}{N_m}$$

Ekvation (35) i BE59 kan skrivas:

$$\frac{n_m^r}{N_m^r} = \frac{n_m^r}{N_m^r} + (R-1) \frac{n_m}{N_m}$$

Om vi antar att den långsamma och gradvisa antropogena tillförseln av fossil koldioxid gör att halten av odissocierad fossil koldioxid i atmosfären och det omblandade skiktet är nära jämvikt så kan vi approximera:

$$\frac{n_a}{N_a} = \frac{n_m'}{N_m'} = R \frac{n_m}{N_m} \quad \text{vilket ger att}$$

$$\frac{n_m^r}{N_m^r} = \frac{n_m^r}{N_m^r} + \frac{(R-1)}{R} \frac{n_a}{N_a} \quad (1)$$

Nu kommer vi till kärnan i den matematiska modellen för ändringen av mängden radioaktiv koldioxid i atmosfären i BE59. Det är differensialsystemet (36) som vi kan skriva på följande sätt där vi bortser från radioaktivt sönderfall (eftersom tidsperioden är så kort jämfört med halveringstiden) och där vi sätter utbyteskoefficienterna lika för radioaktiv och inaktiv koldioxid enligt Bolins och Erikssons motiveringar.

$$\begin{aligned} \frac{dn_a^r}{dt} &= -k_{a-m} n_a^r + k_{m-a} n_m^r \\ \frac{dn_m^r}{dt} &= k_{a-m} n_a^r - k_{m-a} n_m^r - k_{m-d} n_m^r + k_{d-m} n_d^r \\ \frac{dn_d^r}{dt} &= k_{m-d} n_m^r - k_{d-m} n_d^r \end{aligned} \quad (2)$$

Den första ekvationen i (2) kan kombineras med (1):

$$\frac{dn_a^r}{dt} = -k_{a-m} n_a^r + k_{m-a} N_m^r \left( \frac{n_m^r}{N_m^r} + \frac{(R-1)}{R} \frac{n_a}{N_a} \right) \quad (3)$$

Vi inför nu följande nya beteckningar där övre index  $a$  betecknar antropogen:

$$y_a = \frac{n_a^r}{N_a^r}; \quad y_m = \frac{n_m^r}{N_m^r}; \quad y_d = \frac{n_d^r}{N_d^r}; \quad y_a^a = \frac{n_a}{N_a}; \quad (4)$$

Ekvation (3) kan nu skrivas:

$$N_a^r \frac{dy_a}{dt} = -k_{a-m} N_a^r y_a + k_{m-a} N_m^r \left( y_m + \frac{(R-1)}{R} y_a^a \right) = -k_{a-m} N_a^r \left[ y_a + \frac{k_{m-a} N_m^r}{k_{a-m} N_a^r} \left( y_m + \frac{(R-1)}{R} y_a^a \right) \right]$$

Med tillämpning av approximationerna enligt BE59 får vi att  $\frac{k_{m-a} N_m^r}{k_{a-m} N_a^r} = \frac{k_{m-a} N_m}{k_{a-m} N_a} = 1$ . Detta ger att:

$$\frac{dy_a}{dt} = -k_{a-m} \left( y_a - y_m - \frac{(R-1)}{R} y_a^a \right) \quad (5)$$

Den tredje ekvationen i (2) kan med beteckningarna i (4) skrivas:

$$N_d^r \frac{dy_d}{dt} = k_{m-d} N_m^r y_m - k_{d-m} N_d^r y_d = -k_{d-m} N_d^r \left( y_d - \frac{k_{m-d} N_m^r}{k_{d-m} N_d^r} y_m \right)$$

Med tillämpning av approximationerna enligt BE59 får vi att  $\frac{k_{m-d} N_m^r}{k_{d-m} N_d^r} = \frac{k_{m-d} N_m}{k_{d-m} N_d} = 1$ . Detta ger att:

$$\frac{dy_d}{dt} = -k_{d-m} (y_d - y_m) \quad (6)$$

Den andra ekvation i (2) kan skrivas:

$$\frac{dn_m^r}{dt} = -\frac{dn_a^r}{dt} - \frac{dn_d^r}{dt} \quad \text{vilket med (4) ger} \quad N_m^r \frac{dy_m}{dt} = -N_a^r \frac{dy_a}{dt} - N_d^r \frac{dy_d}{dt} \quad . \text{ Vi kan enligt}$$

approximationerna i BE59 anta att  $\frac{N_a^r}{N_m^r} = \frac{N_a}{N_m}$ ;  $\frac{N_d^r}{N_m^r} = \frac{N_d}{N_m}$  vilket ger:

$$\frac{dy_m}{dt} = k_{a-m} \frac{N_a}{N_m} \left( y_a - y_m - \frac{(R-1)}{R} y_a^a \right) + k_{d-m} \frac{N_d}{N_m} (y_d - y_m) \quad (7)$$

Vi behöver bara lösa två av diffekvationerna (5) till (7) eftersom vi kan beräkna den tredje beroende variabeln från  $\frac{dn_a^r}{dt} + \frac{dn_m^r}{dt} + \frac{dn_d^r}{dt} = 0$  varav följer att  $n_a^r + n_m^r + n_d^r = n_{a0}^r + n_{m0}^r + n_{d0}^r = n_0^r$ . Detta ger att

$$N_a^r y_a + N_m^r y_m + N_d^r y_d = n_0^r$$

Vi löser här diffekvationerna (5) och (7) och behöver alltså ett uttryck för  $y_d$ . Detta blir med tillämpning av samma approximationer som i BE59:

$$y_d = y_{b0} \frac{N_a}{N_d} - \frac{N_a}{N_d} y_a - \frac{N_m}{N_d} y_m \quad (8)$$

där  $y_{b0} = \frac{n_0^r}{N_a^r}$  .

Vi har här alltså relaterat det tillförda överskottet av radioaktivt kol från bombproven  $y_{b0} = \frac{n_0^r}{N_a^r}$  till jämviktsmängden av radioaktivt kol i atmosfären. Detta är praktiskt eftersom vi vet att bombproven ökade halten radioaktiv koldioxid i atmosfären med en viss procent, 80 % eller så.

För att lösa ekvationerna behöver vi också beskriva hur antropogen koldioxid har ökat i atmosfären. Vi utgår i denna analys alltså från att ökad koldioxidhalt beror på antropogena utsläpp vilket innebär att systemet var i jämvikt innan utsläppen började. Vidare antar vi, som tidigare nämnts i samband med härledningen av ekvation (1), att atmosfär och havets omblandade ytskikt kan approximeras vara i jämvikt när halten av koldioxid i det omblandade skiktet skall bestämmas från halten i atmosfären (men på grund av bombproven gäller inte motsvarande för halterna av radioaktiv koldioxid).

Detta kan göras enkelt eftersom vi ändå gör flera andra approximationer. Ökningen från 1963 av antropogen koldioxid i atmosfären kommer att påverka bombkurvan om Revellefaktorn är skild från ett. Även om ökningen inte är helt linjär så räcker det för denna analys att approximera den så. Vi får då

$$y_a^a = a(t - t_0) \quad (9)$$

där  $a$  är ökningstrenden och  $t_0$  är starttidpunkten. Från Keelingkurvan är ökningen under femtioårsperioden 1960 till 2010 cirka 70 ppm med en medelhalt av 355 ppm vilket ger att  $a = 0.004 \text{ år}^{-1}$ .

Enligt BE59 antar vi att förhållandet mellan parametrarna  $N_a : N_m : N_d$  är lika med 1:1.2:60.

Massöverföringskonstanterna förhåller sig enligt BE59 till tidskonstanterna på följande sätt:

$$k_{a-m} = \frac{1}{\tau_{a-m}}; k_{d-m} = \frac{1}{\tau_{d-m}}$$

BE59 har räknat med  $\tau_{a-m}$  i intervallet 2 till 10 år och med  $\tau_{d-m}$  från 150 år till oändliga värden. Bernmodellen förefaller ha  $\tau_{a-m} = 19$  år och  $\tau_{d-m} = 173$  år.

Hur fördelningen av utsläppet från bombproven utvecklas i de olika reservoarerna kan också vara av intresse. Då vill vi alltså beräkna  $x_a = \frac{n_a^r}{n_0^r}; x_m = \frac{n_m^r}{n_0^r}; x_d = \frac{n_d^r}{n_0^r};$  . Följande ekvationer kan användas:

$$x_a = \frac{y_a}{y_{b0}}; x_m = \frac{y_m}{y_{b0}} \frac{N_m}{N_a}; x_d = 1 - x_a - x_m; \quad (10)$$

## Lösning av diffekvationerna

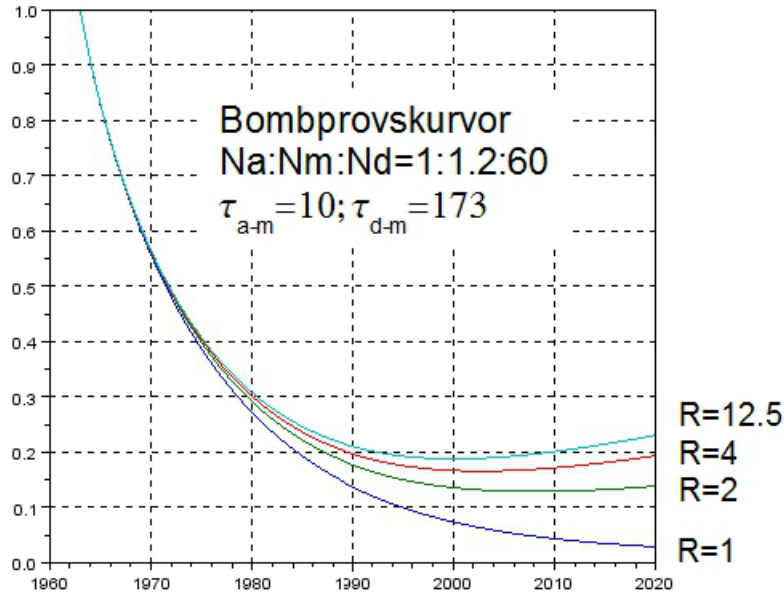
Ekvationerna löstes med hjälp av det interaktiva numerisk-matematiska dataprogrammet [Scilab](#) som är fritt tillgängligt på nätet. Programkoden för att beräkningen och uppritningen av det första diagrammet nedan ser ut på följande sätt:

```

1 clear
2 function ydot=f(t,y)
3     ya=y(1); ym=y(2);
4     yaa=a*(t-t0); yd=yb0*Na/Nd-Na/Nd*ya-Nm/Nd*ym;
5     dyadt=-kam*(ya-ym-(R-1)/R*yaa);
6     dymdt=-Na/Nm*dyadt+kdm*Nd/Nm*(yd-ym);
7     ydot=[dyadt;dymdt];
8 endfunction
9
10 a=0.004; yb0=0.8; Na=1; Nd=60; Nm=1.2;
11 tau_am=10; tau_dm=173; kam=1/tau_am; kdm=1/tau_dm;
12 t0=1963; t=t0:2020; ya0=yb0; ym0=0; y0=[ya0; ym0];
13
14 R=1;
15 y=ode(y0,t0,t,f);
16 ya=y(1,:);
17 xa=ya/yb0;
18
19 R=2;
20 y1=ode(y0,t0,t,f);
21 y1a=y1(1,:);
22 x1a=y1a/yb0;
23
24 R=4;
25 y2=ode(y0,t0,t,f);
26 y2a=y2(1,:);
27 x2a=y2a/yb0;
28
29 R=12.5;
30 y3=ode(y0,t0,t,f);
31 y3a=y3(1,:);
32 x3a=y3a/yb0;
33
34 plot(t, xa, t, x1a, t, x2a, t, x3a)
35 xgrid
36 .....
```

## Resultat

Den ovannämnda programkoden ger följande diagram som resultat:

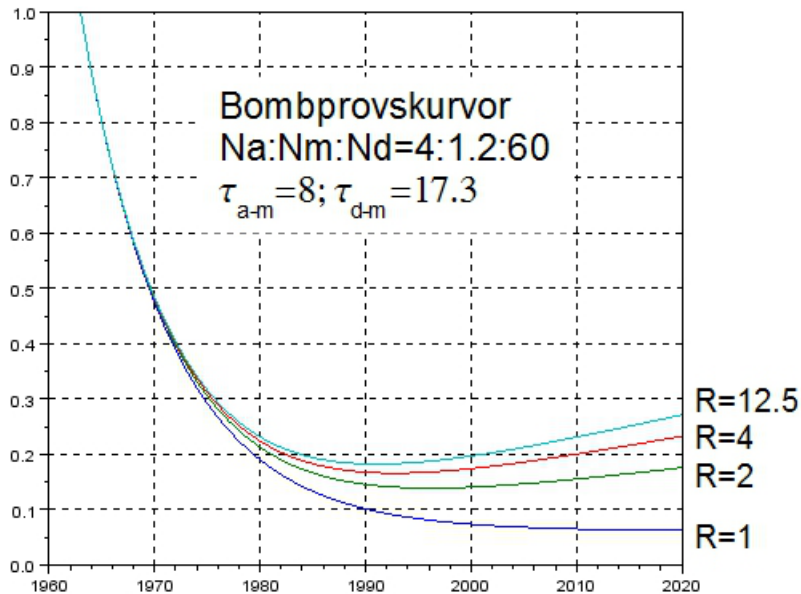


Endast genom att anta att det inte finns någon Revellieffekt,  $R=1$ , får vi en bombkurva som nära liknar den observerade. Även med så liten Revellieffekt som  $R=2$  så blir den beräknade bombkurvan starkt deformerad på grund av utsläppen av antropogen koldioxid. Den gradvisa ökningen av antropogen koldioxid i klimatsystemet motverkar minskningen av radioaktiv koldioxid och till slut börjar denna till och med öka. Med den nivå av Revellieffekten som Bolin och Eriksson kom fram till skulle ökningen ha börjat redan omkring år 2000.

För att få ett hum om hur biosfären skulle påverka bombkurvan så har jag gjort ett liknande resonemang som Bolin och Eriksson på sidan 141. Jag har gjort en grov uppskattning av ett extremfall genom att anta att biosfären och atmosfären kommer i en mycket snabbare jämvikt med varandra än med andra reservoarer och att denna nya kombinerade reservoar är fyra gånger större än atmosfären. Då kan jag använda samma program men med förhållanden 4:1.2:60 mellan reservoarnas storlekar.



Detta är naturligtvis ett mycket approximativt behandlingssätt och det är möjligt att gå vidare och utöka den matematiska modellen med biosfär och humus men det återstår att göra. Med approximationen får vi:



Som framgår i diagrammet så behövde jag ändra tidskonstanterna för att få en kurva, fortfarande utan Revelleffekt, som liknade den observerade bombkurvan. Den andra tidskonstanten är väldigt låg i förhållande till vad man skulle vänta sig från djuphavets egenskaper.

## Referenser

Gösta Pettersson, 2013, [Falskt Alarm](#).

Bolin, Bert, and Erik Eriksson (1959). "Changes in the Carbon Dioxide Content of the Atmosphere and Sea Due to Fossil Fuel Combustion." In *The Atmosphere and the Sea in Motion*, edited by Bert Bolin, pp. 130-42. New York: Rockefeller Institute Press. Online [here](#).

Revelle R, Süess HE, 1957. [Carbon dioxide exchange between atmosphere and ocean and the question of an increase of atmospheric CO<sub>2</sub> during the past decades](#). Tellus 9:18-27.