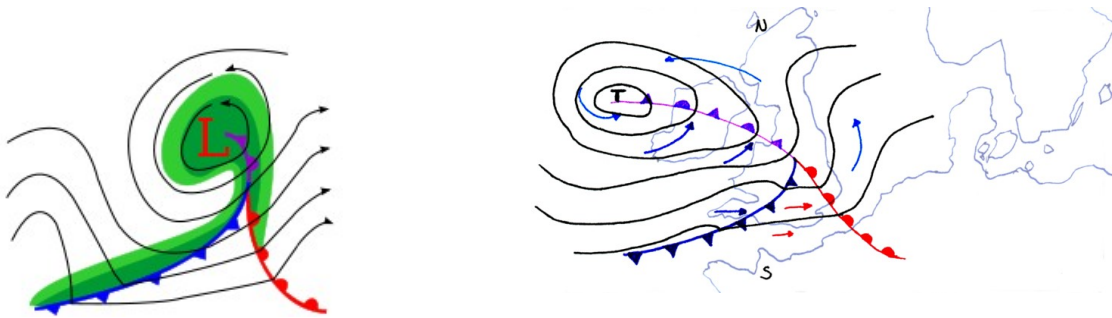


Förklaring av luftens rörelser med en enkel matematisk modell

Nedan ser vi två väderkartor med lågtryck (eller cykloner). Den till vänster visar en idealiserad bild som följer från en enkel matematisk modell. Luften roterar motsols runt lågtrycket. Vinden blåser inte rakt in mot det lägsta trycket i centrum, som man skulle tro, utan följer i stället isobarerna (linjerna för konstant lufttryck). Den högra väderkartan visar att vinden inte exakt följer denna enkla modell utan vrider sig något inåt mot lågtryckets centrum vilket förklaras med inverkan av friktionskrafter i luften (kallas även virvelviskositet) när luften inte är för långt från jordytan. På högre höjd följer vinden isobarerna bättre som i vänstra bilden.

Men hur kommer man fram till den enkla matematiska modellen som visar detta och hur ser den ut?



Det hela grundar sig på Navier-Stokes ekvationer för jordens atmosfär, dvs, ekvationerna för atmosfärens rörelse:

Equations of motion

Momentum

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -2\Omega \times \vec{V} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \hat{k}g + \vec{F}$$

$$\vec{V} \equiv \hat{i}u + \hat{j}v + \hat{k}w$$

$$\frac{du}{dt} \left\{ 2\Omega v \sin(\varphi) = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \right\} + \frac{uv \tan(\varphi)}{a} - \frac{uw}{a} - 2\Omega w \cos(\varphi) + F_x$$

$$\frac{dv}{dt} \left\{ 2\Omega u \sin(\varphi) = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \right\} - \frac{u^2 \tan(\varphi)}{a} - \frac{vw}{a} + F_y$$

$$\frac{dw}{dt} - 2\Omega u \cos(\varphi) = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{u^2 + v^2}{a} - g + F_z$$

Dessa ekvationer finns också beskrivna i Andrews lärobok, se referenslistan. I ekvationerna står x , y och z för koordinater mot öst, mot norr och uppåt och u , v och w betecknar vindvektorns komponenter i riktning mot öst, mot norr och uppåt. Ω är jordens rotationshastighet i radianer per sekund, φ är latituden och ρ är luftens densitet i kg/m^3 .

Om man nu undersöker storleksordningen av termerna i ekvationerna för u och v , vilket också finns

beskrivet i Andrews lärobok, så finner man att de inringade termerna är så pass dominerande att alla övriga termer med god approximation kan försummas under betingelser som inte är ovanliga. Detta gäller vid mer än 10 latitudgrader från ekvatorn och på en höjd högre än 1 km.

Den leder till att den horisontella strömningen kan beskrivas med följande enkla matematisk modell som ger vindens två horisontella komponenter där $f = 2\Omega \sin(\varphi)$:

$$v = \frac{1}{f\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$u = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial P}{\partial y}$$

Vinden enligt denna enkla matematiska modell brukar kallas för *geostrofisk vind* och de två ekvationerna kan kallas *de geostrofiska ekvationerna*.

Vi kan nu bevisa att vinden är parallell med isobarerna, dvs. vinkelrätt mot tryckgradienten som ju är vektorn $(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y})$. Vi skall visa detta genom att beräkna skalärprodukten av vindvektorn och tryckgradienten:

$$(u, v) \cdot (\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}) = \frac{1}{f\rho} (-\frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y}) = 0$$

Skalärprodukten är alltså lika med noll vilket är detsamma som att de två vektorerna är vinkelräta mot varandra. Vinden blåser vinkelrätt mot tryckgradienten dvs. parallellt med isobarerna. V.S.B.

För att visa att vinden blåser motsols runt lågtrycket kan vi välja lämpliga punkter. Ta en punkt till höger om lågtrycket där isobaren går i nord-sydlig riktning vilket innebär att $u = 0$. Då måste $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$ eftersom trycket ökar mot öster. Men detta innebär att $v > 0$ dvs. vinden blåser mot norr vilket innebär att cirkulationen runt lågtrycket är motsols (man kan testa andra punkter på motsvarande sätt väster, norr och söder om centrum med motsvarande resultat).

På motsvarande sätt kan man enligt modellen visa att vinden blåser medsols runt ett högtryck.

Men är vi på södra halvklotet så säger modellen att det blir tvärtom. Detta beror på att latituden har negativa värden på södra halvklotet så att värdet på f blir negativt.

Alla dessa prediktioner med denna mycket enkla matematiska modell om att vinden blåser parallellt med isobarerna och hur den cirkulerar runt lågtryck och högtryck på norra respektive södra halvklotet stämmer med observationerna.

De två geostrofiska ekvationerna låter oss också förstå varför vinden blåser parallellt med isobarerna, dvs. vad som hindrar luften att blåsa direkt mot det lägsta trycket i lågtryckets centrum. Ekvationerna innebär att den så kallade *Corioliskraften* som verkar på luften på grund av jordrotationen måste balansera tryckgradienten. Denna balans kan endast bestå om luften rör sig längs isobarerna.

Referenser

Andrews, D.G., 2010. *An Introduction to Atmospheric Physics*. Cambridge University Press. Second edition. [Här](#) eller [här](#).

Bilderna på väderkartor är från Wikipedia [här](#) och [här](#).

Rörelseekvationerna är från [Encyclopedia of Standard Planetary Information, Formulae and Constants](#)